مفاهيم أساسية:

تعريف:

لتكن A, B مجموعتان غير خاليتين نسمي المجموعة

$$A\times B = \{(a,b) ; a\in A , b\in B\}$$

الجداء الديكارتي للمجموعتين A,B

ونسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A\times B$ علاقة من A إلى B

نسمي كل تطبيق من الشكل

$$* : A\times B \to A$$
$$(a,b) \to a*b \in A$$

عملية ثنائية على A أو (قانون التشكيل الداخلي على A) تطبيق منطلقه الجداء الديكارتي للمجموعة نفسها

$$Z\times Z \to Z$$
$$(m,n) \to m+n$$

نسمي كل تطبيق من الشكل

$$B\times A \to A$$
$$(r,a) \to r\cdot a$$

عملية خارجية من اليسار على A حيث تقع المجموعة الأخرى

تعريف:

لتكن G مجموعة غير خالية و $G\times G \to G$ عملية ثنائية معرفة على G نقول أن الثنائية $(G,.)$ تشكل زمرة إذا تحققت الشروط:

(1) $\forall a,b\in G ; a.b\in G$

(2) $\forall a,b,c\in G ; (a.b).c = a.(b.c)$

(3) يوجد في G عنصر $e\in G$ (حيادي) محايد

$$\forall a\in G \quad a.e = e.a = a$$

(4) لكل عنصر $a\in G$ يوجد مقابل نظير له $\acute{a}\in G$ بحيث

$$a\acute{a} = \acute{a}a = e$$

نقول عن الزمرة G أنها تبديلية إذا تحققت الشرط

$$\forall a,b\in G \quad ab=ba$$

إذا لم تملك نصف الزمرة S عنصر حيادي فيمكن تزويدها به وذلك بإضافة عنصر جديد هو 1 إلى S يحقق الشرط التالي

$$\forall s \in S : s1 = 1s = s \qquad 1.1 = 1$$

سنرمز بـ S^1 للمجموعة

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{إذا كانت S تحوي 1} \\ S \cup \{1\} & \text{إذا كانت S لا تحوي 1} \end{cases}$$

إذا كانت S تحوي أكثر من عنصر وكانت تحوي العنصر k الذي يحقق الشرط

$$\forall x \in S : xk = kx = k$$

فإننا ندعو k عنصراً ماصاً أو عنصراً صفرياً (أو اختصاراً ثم صفر S) ونرمز له غالباً بالرمز 0 كما يمكننا التحدث عن S أنها نصف زمرة ذات صفر ونعرف العنصر اليميني والعنصر اليساري بشكل مشابه للحيادي اليميني والحيادي اليساري

إذا ملكت نصف الزمرة S عنصراً ماصاً فهو وحيد لأنه لو كان هناك ثمة أي لو كان يوجد عنصراً ماصاً آخر مثل k' فإن $k = kk' = k'$

إن أهمية الشرط (S تحوي أكثر من عنصر) تأتي من أن نصف الزمرة التافهة $\{a\}$ حيث $a^2 = a$ يكون فيها a حيادي وصفر بنفس الوقت

إذا كانت نصف الزمرة S لا تحوي عنصراً ماصاً فمن السهل تزويدها وذلك بإضافة صفر إلى المجموعة S يحقق الشرط: $\forall s \in S : s0 = 0s = 0$

ويكون أيضاً $0 = 00$ فنحصل على نصف زمرة $S \cup \{0\}$ ذات عنصر ماص أو ذات صفر ونرمز لها بـ S^0 ويكون

$$S^0 = \begin{cases} S & \text{إذا كانت S تحوي 0} \\ S \cup \{0\} & \text{إذا كانت S لا تحوي 0} \end{cases}$$

ملاحظة:

إن إضافة أي من العنصرين (الحيادي أو الماص) إلى نصف زمرة قد يؤدي إلى فقدان بعض خصائصها الأصلية

القسم : السنة : المادة : المحاضرة :

تعريف :

نقول عن الثلاثية $(F, +, \cdot)$ إنها تشكل حقلاً إذا حققت الشروط :

① $(F, +)$ زمرة جمعية تبديلية

② $(F^{*}, \cdot)$ زمرة ضربية تبديلية حيث $F^{*} = F \setminus \{0\}$ (0 المحايد الجمعي)

③ الضرب توزيعي على الجمع

تعريف :

لتكن R حلقة واحدية نقول عن الزمرة الجمعية التبديلية $(M, +)$ إنها تشكل مودولاً فوق الحلقة R (من اليسار) إذا وجد قانون التشكيل الخارجي :

$$\cdot : R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longmapsto r \cdot m$$

يحقق أياً كان $\alpha, \beta \in R$ و $x, y \in M$ فإن

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha \beta)x$$

$$1_R \cdot x = x$$

تعريف :

الفضاء المتجهي هو مودول فوق حقل